# ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΥ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ

# ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ – ΕΜΒΑΔΑ – ΟΓΚΟΙ

**<u>Ασκήσεις :</u>**

**1)** Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

**α)** $\int_1^2 x\ln x\,dx$ **β)** $\int_1^4 \frac{x+2}{x}dx$ **γ)** $\int_{-1}^0 x^2\sqrt{x+1}\,dx$ , $u=\sqrt{x+1}$

**δ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^5 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx$ **ε)** $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ , $x=\eta\mu^2\theta$ **στ)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1+\eta\mu 2\theta}$ , $\varepsilon\varphi\theta=t$

**η)** $\int \frac{2x-3}{x^2-2x+10}dx$ **θ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu^2\theta}d\theta$

**2)** Ν.δ.ο. : **α)** $\int_0^1 \frac{\tau o\xi\eta\mu x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi^2}{8}$ **β)** $\int_0^{\frac{1}{2}} x\tau o\xi\eta\mu x\,dx=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{48}$ **γ)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=\ln\sqrt{3}$

**3)** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: **α)** $\int_0^2 \frac{2x^2+1}{2x^2+3}dx-2\int_2^0 \frac{dx}{2x^2+3}$

**β)** $\int_{-1}^1 \left|e^x-1\right|dx$ **.**

**4)** Αν $\int_0^{\alpha} \frac{2x-1}{x^2+1}dx=\ln 4-\frac{\pi}{3}$ να βρείτε την τιμή του $a$ .

**5)** Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (t^2-t)dt}{\sigma\upsilon\nu 3x-1}$ **.**

**6)** Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής και ισχύουν :

$\int_6^7 f(x)dx=5$ , $\int_0^7 f(x)dx=20$ , $\int_4^2 f(x)=-3$ , $\int_0^4 f(x)dx=8.$ να υπολογίσετε :

$\int_4^6 f(x)dx$ , $\int_2^7 f(x)dx$ , $\kappa\alpha\iota$ $\int_0^2 f(x)dx.$

**7)** Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $\psi = 3e^{-x}$, $\psi = e^{x} - 2$ και τον άξονα του ψ ισούται με 2ln3 τ.μ.

**8)** Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της $\psi = x^2 - 4x + 3$ και της ευθείας $\psi = x - 1$.

**9)** Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της $\psi = 3 + 2x - x^2$ και της $\psi = x^2 - 4x + 3$.

**10)** Το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των $\psi = \sigma\upsilon\nu x$ , $\psi = \eta\mu x$ και του άξονα ΟΨ περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα ΟΧ. Ν.δ.ο ο παραγώμενος όγκος είναι $\frac{\pi}{2}$ $\kappa.\mu.$

**11)** Δίνεται η $\psi = e^{x+1}$.

α) ν.δ.ο η εφαπτομένη της καμπύλης στο $(1, e^2)$ περνά από την αρχή των αξόνων.

β) να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται αν το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη , την εφαπτομένη της στο $(1, e^2)$ και τον άξονα των ψ στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των χ.

**12)** Η περιοχή που περικλείεται από τους άξονες και την καμπύλη $\psi = (x + \kappa)^2$ , $\kappa > 0$ περιστρέφεται κατά 2π γύρω από τον άξονα των ψ και παράγει όγκο $\frac{\pi}{6}$ $\kappa.\mu.$, να βρείτε το $\kappa$ .

**13)** Δίνεται η καμπύλη $\psi = \chi \cdot e^{x}$. Ν.δ.ο το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη , τον χχ΄ και από την ευθεία που περνά από το σημείο καμπής της καμπύλης και είναι κάθετη στο χχ΄ είναι $\frac{e^2 - 3}{e^2}$ $\tau.\mu.$

**14)** Δίνεται η καμπύλη $f(x) = x^2 - \lambda x$ και η ευθεία $g(x) = (4 - \lambda)x$ $\mu\varepsilon$ $0 < \lambda < 4$.
Αν $\mathrm{E}_1$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)$ και τον χχ΄ και $\mathrm{E}_2$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)$ $\tau\eta\nu$ $g(x)$ και το χχ΄ και ισχύει $\mathrm{E}_2 = 7\mathrm{E}_1$ να βρείτε τιμή του $\lambda$ .

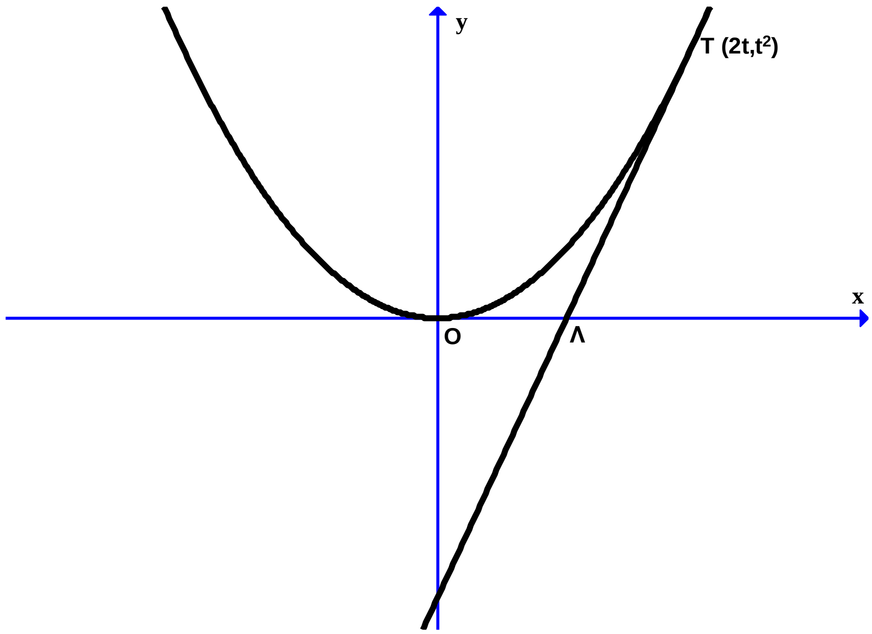
**15)** Δίνεται το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}_\nu = \int_0^1 x^\nu e^x dx.$ α) να αποδείξετε $\mathrm{I}_\nu = e - \nu \cdot \mathrm{I}_{\nu-1}$ , $\forall \nu \geq 2$.

β) να υπολογίσετε το $\mathrm{I}_3$.

**16)** Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $f(x) + f(1 - x) = x - x^2$ $\forall x \in R$,

Ν.δ.ο. $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{12}$.

**17)**




ΤΛ είναι η εφαπτομένη της $\psi = \frac{x^2}{4}$ στο $\mathrm{T}(2t, t^2) \quad (t > 0)$. Αν το εμβαδό του μεικτόγραμμου τριγώνου ΟΤΛ είναι $\frac{9}{2}\tau.\mu.$ να υπολογίσετε :

i) την τιμή του t.

ii) τον όγκο του στερεού όταν το πιο πάνω χωρίο περιστραφεί κατά 2π γύρω από τον ΟΨ.

**18)** α) Με το μετασχηματισμό x= α-u να αποδείξετε ότι $\int_0^{\alpha} \mathrm{f(x)dx} = \int_0^{\alpha} \mathrm{f}(\alpha - \mathrm{x})\mathrm{dx}$

και με το μετασχηματισμό x= α+u να αποδείξετε ότι $\int_a^{2\alpha} \mathrm{f(x)dx} = \int_0^{\alpha} f(\alpha + x)dx$

β) Να δείξετε ότι $\int_0^{2\alpha} \mathrm{f(x)dx} = \int_0^{\alpha} [f(\alpha - x) + f(a + x)]dx$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \eta\mu^3\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) + \eta\mu^3\left(\frac{\pi}{4} + \chi\right) \right] d\chi$ .

**19)** Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $x = 2\pi - u$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{2\pi} x \cdot f(\sigma\upsilon\nu x)\,dx = \pi \int_0^{2\pi} f(\sigma\upsilon\nu x)\,dx$$

και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{3 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

**20)** Δίνεται η $f(x)$ , $x \in [a, \beta]$ συνεχής και τρείς φορές παραγωγίσιμη στο π.ο. της με $f(a) = f(\beta) = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f'(\beta) = 0.$ $\mathrm{N}.\delta.o.$ $\int_a^{\beta} f(x) f'''(x)dx = \frac{1}{2}[f'(a)]^2$ .

**21)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x+1}$ , $x \geq 0$

α) Να βρείτε το εμβαδό Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη καμπύλη και τις ευθείες χ=0 , ψ=0 , και χ=λ με λ>0.

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \dfrac{\mathrm{E}(\lambda)}{\lambda}$

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\mathrm{E}(\lambda)}{\lambda}$

**22)** Αν η συνάρτηση $h(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ και ικανοποιεί την σχέση $\int_0^1 x \cdot h'(x)dx = 2012 - \int_0^1 h(x)dx$ να βρείτε το $h(1)$.

2**3)** Αν $\mathrm{I}_\nu = \int_0^1 \chi^\nu \sqrt{1-\chi^2}\,dx$ , $\nu \geq 0$ $\quad \nu.\delta.o. \quad (\nu+2)\cdot \mathrm{I}_\nu = (\nu-1)\cdot \mathrm{I}_{\nu-2}$ , $\nu \geq 2$.

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\mathrm{I}_5$.

**24)** Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x)$ για την οποία ισχύει $f'(x) = x \cdot f(x)$ και $f(0) = 2$.

**25)** Να βρείτε το ολοκλήρωμα : $\int (3x - \eta\mu\, x)dx$.

**(παγκύπριες 2006)**

**26)**Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^2 (2x+1)dx$

**(παγκύπριες 2008)**

**27)** Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \sqrt{x}$ , $x > 0$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \ln\sqrt{x}\; dx$

**(παγκύπριες 2009)**

**28)** Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = x^2 + 1$ , ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int \dfrac{x^3}{(x^2+1)^2}dx$. **(παγκύπριες 2006)**

**29)** Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = e^x$ , ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \dfrac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

**(παγκύπριες 2007)**

**30)** Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ και $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+f''(x)]\sigma\upsilon\nu x dx=2$.

Να υπολογίσετε το f΄(0).

**(παγκύπριες 2008)**

**31)** Δίνεται η συνάρτηση: $f(\chi)=\frac{2}{\chi}$, $\chi>0$. Έστω A το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f$, τον άξονα των χ και τις ευθείες με εξισώσεις $\chi=1$ και $\chi=e^2$. Να βρείτε την ευθεία $\chi=\lambda$ η οποία χωρίζει το χωρίο A σε δύο ισεμβαδικά χωρία. **(παγκύπριες 2011)**

**32)** Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται αν το χωρίο που περικλείεται από τους άξονες την καμπύλη y=lnx και την ευθεία y=2 στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x.

**(παγκύπριες 2009 σειρά β΄)**

**33)** Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της καμπύλης $y=x^2+1$, την ευθεία x=2 και τους άξονες Ox και Oy.

**(παγκύπριες 2007)**

**34)** Δίνονται οι καμπύλες $\psi^2=4\chi$ και $\chi\psi=2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίο που περικλείεται από τις δυο καμπύλες, την ευθεία $\chi=4$ και τον άξονα των χ.

**(παγκύπριες 2010)**

**35)** Αν $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+2\eta\mu\chi}d\chi$ και $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu 2\chi}{1+2\eta\mu\chi}d\chi$,

να υπολογίσετε τα: A, $A+B$ και B. **(παγκύπριες 2010)**

**36)** (α) Να δείξετε ότι : $\int_0^{\alpha}x^3f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2}xf(x)\,dx$, $\alpha>0$

(β) Με την χρήση του πιο πάνω αποτελέσματος , ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος: $\int_0^2 x^3e^{x^2}dx$

**(παγκύπριες 2009 σειρά β΄)**

**37)** Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g ορισμένες στο διάστημα $[0\,,\,\pi]$.
Αν για κάθε $x\in[0\,,\,\pi]$ ισχύουν οι σχέσεις $f(x)=f(\pi-x)$ και $g(x)+g(\pi-x)=\pi$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x=\pi-y$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi}f(x)\,g(x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)dx$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε

το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi}\frac{x\,\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$.

**(παγκύπριες 2006)**

**38)** (α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{1+e^t}=1-\frac{e^t}{1+e^t}$ για κάθε πραγματικό αριθμό t.

(β) Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή πρώτη παραγώγο στο [0, 2] για την οποία ισχύει:

$$\int_0^1\frac{dt}{1+e^t}=\int_0^2 f'(x)dx-\ln(1+e)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός ξє (0, 2), για τον οποίο ισχύει 2f΄(ξ)-1=ln2.

**(παγκύπριες 2006 σειρά β΄)**

**39)** Δίνεται συνάρτηση $f:R\to(0,+\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία

ισχύουν: $f'(2)=0$, $f(0)=1$ και $\frac{1}{2}\int_0^2 \chi\cdot f''(\chi)d\chi+\frac{3}{2}\int_0^2 f'(\chi)d\chi=3$.

a. Να δείξετε ότι: $f(2)=4$.

b. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u=f(\chi)$, όπου f η πιο πάνω συνάρτηση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$\int_0^2\frac{f'(\chi)}{f^2(\chi)+5f(\chi)+6}d\chi$. **(παγκύπριες 2011)**

**40)** Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με f(-x)=f(x) και g(x)+g(-x)=1, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση u = -x, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να

δείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x)dx=\int_0^{\alpha} f(x)dx,\quad \alpha>0$.

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να

υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^{2x}+1}dx$.

**(παγκύπριες 2008)**

**41)** α) Με το μετασχηματισμό $x=\alpha+\beta-u$ να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^3 x}dx$.

**42)** Αν είναι f συνεχής συνάρτηση στο R ν.δ.ο. $\int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

**43)** Δίνεται το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}(\alpha)=\int_{-2}^{\alpha}(-\chi^3+\chi^2+6\chi)d\chi \quad \mu\varepsilon \;\; \alpha>-2.$

Να υπολογίσετε το $\alpha$ ώστε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}(\alpha)$ να έχει ελάχιστη τιμή.

**44)** Αν είναι f συνεχής συνάρτηση στο R και ισχύει :

$a\cdot f(x)+\beta\cdot f(-x)=\gamma$ , $x\in R$ , $\alpha\neq-\beta$ ν.δ.ο $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\dfrac{2\gamma}{\alpha+\beta}$ .

**45)** Δίνεται το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\dfrac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{e^{\sigma\upsilon\nu x}+e^{-\sigma\upsilon\nu x}}dx$, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό

$x=\pi-u$ ν.δ.ο. $\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\dfrac{e^{-\sigma\upsilon\nu x}}{e^{\sigma\upsilon\nu x}+e^{-\sigma\upsilon\nu x}}dx.$ και να αποδείξετε ότι $\mathrm{I}=\dfrac{\pi}{2}$ .

**46)** Δίνεται ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

α) Αν $f$ είναι άρτια ν.δ.ο. $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx=2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ .

β) Αν $f$ είναι περιττή ν.δ.ο. $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx=0$ .

γ) Να υπολογίσετε το $\int_{-5}^{5}\dfrac{x^2\eta\mu x}{x^4+1}dx.$

**47)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+e}{e^x+1}\right)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x\in R$ .

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_0^1 f(x)dx$ .

**48)** Η συνάρτηση $f$ έχει συνεχή τρίτη παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και οι εφαπτόμενες της στα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, f(a)) \quad \kappa\alpha\iota \quad \mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ είναι παράλληλες.

Να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} x\cdot f'''(x)dx=\beta f''(\beta)-\alpha f''(\alpha).$

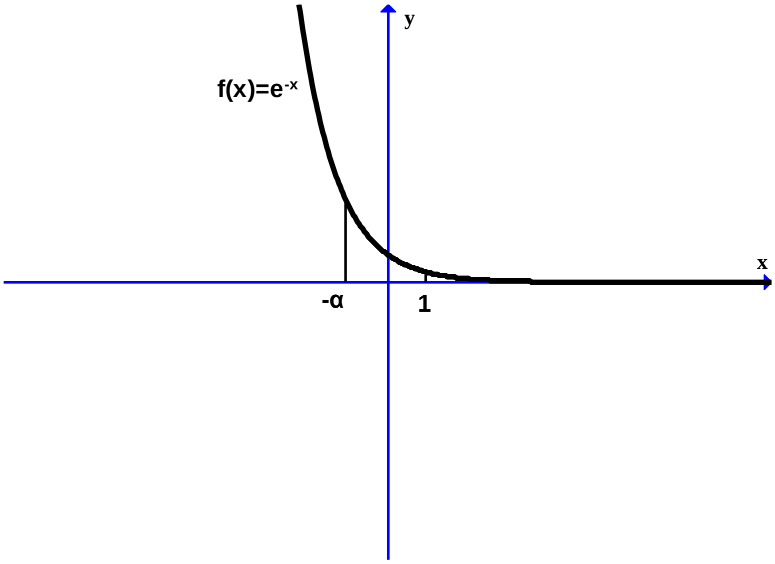
**49)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων $\psi=e^x$ , $\psi=\ln x$ και των ευθειών $x=1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x=e.$

**50)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων

$\psi=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$ , $\psi=\varepsilon\varphi x$ και του ΟΨ με $0<x<\dfrac{\pi}{2}.$

**51)** Δίνεται η συνάρτηση $\psi = x^3$ , $x \geq 0$. Να αποδείξετε ότι αν πάρουμε ένα τυχαίο σημείο Α της συνάρτησης και Β η προβολή του πάνω στον ΟΧ τότε η καμπύλη χωρίζει το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ σε δύο ισοδύναμα χωρία.

**52)** Αν $\alpha > 0$ και το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου είναι $\frac{3e-1}{e}$ $\tau.\mu.$ να υπολογίσετε το $\alpha$.




**53)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $\psi^2 = 4 + x$ και την ευθεία $x + 2\psi = 4$.

**54)** Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = \frac{1}{1+e^x}$ και τις ευθείες χ=0 , ψ=0 και χ=ln2 ισούται με $\ln\frac{4}{3}$ τ.μ.

**55)** Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = 1+\sqrt{x}$ και τις ευθείες χ=0 , και ψ=2χ περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα Οψ.

**56)** Να βρείτε το κοινό μέρος που περικλείεται από τον κύκλο $x^2 + \psi^2 = 4$ και την παραβολή $\psi^2 = 3x$.

**57)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει η σχέση $e^x F(x) = f(x),\ \forall\ x \in R$, όπου $F(x)$ το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$. Αν η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο $\psi = e$ να δείξετε ότι $f\left(x\right) = e^{e^x + x}$.